Analyse Complexe
TD 4
Limites uniformes de fonctions holomorphes

Exercice 1 Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$f(z) := \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t} \mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que f est bien définie et est entière (i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$).
2. On fixe un paramètre $\lambda > 0$ et $z = x + iy$, où $y = \pi/2 + \lambda$. En utilisant une intégration le long d'une courbe lisse par morceaux de support
$$C_{\epsilon,R} = \{z = \epsilon e^{i\theta}\colon 0 \le \theta \le \pi/2\} \cup [\epsilon, R] \cup \{z = Re^{i\theta}\colon 0 \le \theta \le \pi/2\} \cup [i\epsilon, iR]\,,$$
montrer que $|f(z)| \le 1/\lambda$. En déduire que $|f|$ est bornée par $2/\pi$ hors de la bande $|\mathrm{Im}\, z| \le \pi$.
3. À l'aide de f, construire une fonction entière g non nulle telle que $g(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini et que z reste sur une demi-droite quelconque d'extrémité l'origine du plan.

Exercice 2

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, *à croissance modérée*, i.e. telle qu'il existe une constante A telle que $|f(x)| \le A/(1+x^2)$ pour tout x. On rappelle que sous cette hypothèse la transformée de Fourier de f :
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$
est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que si $\hat{f}$ est également à croissance modérée, la formule d'inversion de Fourier est valable :
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi$$
   (a) On suppose de plus qu'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $|\hat{f}(\xi)| \le Ae^{-B|\xi|}$ pour tout ξ. Montrer que f est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}(z)| < C\}$, pour tout $0 < C < B/(2\pi)$.
   (b) Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact dont la transformée de Fourier est également à support compact.
2. On se donne cette fois une fonction f holomorphe sur la bande $\{z, |\mathrm{Im}(z)| < a\}$, pour un certain $a > 0$ et vérifiant
$$|f(x+iy)| \le \frac{A}{1+x^2}$$
pour un certain $A > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $|y| < a$. Montrer l'existence d'une constante B telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$|\hat{f}(\xi)| \le Be^{-2\pi b|\xi|},$$
pour tout $0 \le b < a$.
Si $\xi > 0$, considérer le contour d'intégration délimité par le rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R - ib\}$.

Exercice 3 (*) On note $U = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On admet le fait suivant (que l'on reverra plus tard !).

Fait. Si f est holomorphe bornée sur U et s'annule en $z_1, z_2, \ldots$ avec $\inf(|z_n|) > 0$ et $\sum \mathrm{Re}(z_n^{-1}) = \infty$, alors f est nulle.

A l'aide de résultat, montrer la moitié du théorème de Müntz : si (k_n) est une suite strictement croissante de réels positifs avec $k_0 = 0$ et $\sum_{n>0} k_n^{-1} = +\infty$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x^{k_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Si μ est une mesure borélienne régulière sur $[0,1]$, considérer la fonction sur U donnée par $f_\mu(z) = \int_0^1 t^z \mu(t)$.

Exercice 4

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Soit $a \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\bar{D}(a,r) \subset U$ et f ne s'annule pas sur le cercle $S(a,r)$. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{S(a,r)} \frac{f'}{f} = m$$
où m est le nombre de zéros de f dans $D(a,r)$, comptés avec multiplicité.
2. Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un domaine U de $\mathbb{C}$, qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction g. Montrer que si g n'est pas constante,
$$g(U) \subset \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} g_m(U)$$
(et donc en particulier $g(U) \subset \bigcup_n g_n(U)$). Montrer que cette inclusion n'est pas une égalité.
3. En déduire que si $(g_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes injectives sur un domaine U de $\mathbb{C}$, qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction g, alors g est soit constante, soit injective.

Exercice 5

(*) Montrer qu'une limite simple de fonctions holomorphes sur un ouvert U est une fonction qui est holomorphe sur un ouvert V dense dans U.

Penser au théorème de Baire !

Exercice 6

1. Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $f : U \to U$ une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = z_0$. Montrer que $|f'(z_0)| \leq 1$.
2. Montrer que si $f'(z_0) = 1$, $f = \mathrm{Id}_U$.
3. (**) En utilisant la question 2 de l'exercice 4 et le théorème de Montel, montrer que f est bijective si et seulement si $|f'(z_0)| = 1$.

Exercice 7

Soient $a < b$ deux réels et
$$U = \{z \in \mathbb{C}, a < \mathrm{Re}(z) < b, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$
Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ bornée. On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c+iy) \to 0$ quand $y \to +\infty$. Montrer que $f(x+iy) \to 0$ quand $y \to +\infty$ pour tout $x \in]a,b[$, uniformément sur les compacts de $]a,b[$.

On pensera à utiliser le théorème de Montel !

Exercice 8

1. Sur un disque, peut-on approcher uniformément sur les compacts une fonction holomorphe par des polynômes ? Qu'en est-il sur une couronne ? Essayer de deviner une condition sur K, compact du plan, qui garantisse qu'une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de K puisse être approchée uniformément sur K par des polynômes.
2. (*) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $K \subset U$ compact. Montrer qu'il existe une famille finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de segments dans $U \backslash K$ telle que pour toute $f \in H(U)$, l'on ait
$$\forall z \in K,\ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$
3. En déduire que f peut être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles dont les pôles sont dans $\mathbb{C} \backslash K$.
4. Montrer que si K est un compact du plan dont le complémentaire est connexe, toute fonction holomorphe sur un voisinage de K peut être approchée uniformément sur K par des polynômes.
On commencera par le cas $f(z) = 1/(z-a)$, $a \notin K$.

5. (*) Que dire de la réciproque du résultat précédent ?
6. *Une première application.* Soit K un sous-ensemble compact du cercle unité S. Montrer que si $K \neq S$, il existe un polynôme P tel que $P(0) = 1$ et $|P(z)| < 1$ pour tout $z \in K$. Que dire si $K = S$?
7. *Une deuxième application.* Pour $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \{z, |z| \leq n, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n}\} \cup \{z, |y| \leq \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \leq x \leq n\} \cup \overline{D}(0, \frac{1}{n+1}).$$

Dessiner K_n. Que peut-on dire de son complémentaire ?
En utilisant les ensembles K_n, fabriquer une suite $(P_n)_n$ de polynômes vérifiant $\lim P_n(0) = 1$, $\lim P_n(z) = 0$ pour tout z différent de 0, et $\lim P_n^{(k)}(z) = 0$ pour tout $k > 0$ et tout $z \in \mathbb{C}$, cette dernière convergence étant uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.
Le résultat de cette question est à rapprocher de celui de l'exercice 5.

Exercice 9 (**)

1. Soit D le disque unité de $\mathbb{C}$. Existe-t-il une application holomorphe injective propre (i.e. telle que l'image réciproque de tout compact est compacte) $f : D \to \mathbb{C}$?
2. Soit A et B deux compacts disjoints de $\mathbb{C}$ tels que $\mathbb{C}\backslash(A \cup B)$ soit connexe, u et v deux fonctions entières. Soit $\epsilon > 0, M > 0$ deux réels. En appliquant le théorème d'approximation de Runge vu à l'exercice 8, montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\forall z \in A,\ |P(z) + f(z)| \leq \epsilon \quad ; \quad \forall z \in B,\ |P(z) + g(z)| \geq M.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \{z \in \mathbb{C}, 1 - \frac{1}{2^{2n}} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n+1}\}.$$

Dessiner K_n quand n varie. Montrer qu'il existe $f \in H(D)$ telle que $\min\{|f(z)|, z \in K_n\} \geq 2^n$ pour tout n.
On cherchera f sous la forme $f = \sum P_n$, où pour chaque n, P_n est un polynôme construit en appliquant judicieusement la question précédente avec $A = K_1 \cup \ldots \cup K_{n-1}$ et $B = K_n$.
4. Soit $m \geq 1$. On appelle *plongement holomorphe propre* de D dans $\mathbb{C}^m$ une application

$$z \in D \mapsto (f_1(z), \ldots, f_m(z)) \in \mathbb{C}^m$$

qui soit injective, propre, avec chaque f_i holomorphe, et $(f_1'(z), \ldots, f_m'(z)) \neq (0, \ldots, 0)$ pour tout $z \in D$. Montrer qu'il existe un plongement holomorphe propre de D dans $\mathbb{C}^3$.
On prendra $f_1(z) = 1/(z-1)$. Que suffit-il alors d'imposer à f_2 et f_3 pour que $z \mapsto (f_1(z), f_2(z), f_3(z))$ soit un plongement holomorphe propre ?